Teorema di Cauchy-Lipschitz

Convergenza uniforme

Sia $[0,T]$ un'intervallo in $\mathbb{R}$ e siano $f : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ e $g : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ due funzioni limitate. Definiamo la distanza tra le funzioni f e g (sull'intervallo $[0,T]$) come

$$\|f-g\|_\infty := \sup\big\{|f(t)-g(t)| \ : \ t \in [0,T]\big\}.$$

In particolare, si ha

$$\big|f(t)-g(t)\big| \le \|f-g\|_\infty \qquad \text{per ogni} \qquad t \in [0,T].$$

Definizione 1. *Diremo che la successione di funzioni*

$$f_n : [0,T] \to \mathbb{R}^m.$$

converge uniformemente *alla funzione limite*

$$f : [0,T] \to \mathbb{R}^m,$$

se

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Osserviamo che se la successione di funzioni converge uniformemente, allora essa converge anche **puntualmente**, ovvero

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t) \quad \text{per ogni} \quad t \in [0,T].$$

Teorema 2. *Supponiamo che la successione di funzioni* **continue**

$$f_n : [0,T] \to \mathbb{R}^m$$

converge uniformamente (su $[0,T]$) alla funzione

$$f : [0,T] \to \mathbb{R}^m.$$

Allora, f è continua su $[0,T]$.

Dimostrazione: Dati $t \in [0,T]$ e $\varepsilon > 0$, trovare $\delta > 0$ tale che:

$$|f(t)-f(s)| \le \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad s \in [0,T] \quad \text{tale che} \quad |t-s| < \delta.$$

Usare la convergenza uniforme e la continuità delle funzioni f_n. □

Definizione 3. *Diciamo che la successione di funzioni*

$$f_n : [0,T] \to \mathbb{R}^m$$

è una **successione di Cauchy***, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che*

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \textit{per ogni} \quad n,m \ge N.$$

Teorema 4 (Teorema di completezza - le successioni di Cauchy convergono)**.** *Sia*

$$f_n : [0, T] \to \mathbb{R}^m$$

una successione di Cauchy di funzioni continue. Allora, esiste una funzione continua

$$f : [0, T] \to \mathbb{R}^m$$

tale che f_n converge uniformemente a f.

Lemma 5 (Il lemma chiave)**.** *Sia*

$$g_n : [0, T] \to \mathbb{R}^m$$

una successione di funzioni continue tale che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|g_{n+1} - g_n\|_\infty$$

converge. Allora, per ogni $t \in [0, T]$ la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \big(g_{n+1}(t) - g_n(t)\big)$$

converge. La funzione

$$g(t) := g_1(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(g_{n+1}(t) - g_n(t)\big) \qquad \textit{per ogni} \quad t \in [0, T],$$

è il limite uniforme della successione g_n su $[0, T]$.

EDO - formulazione integrale

Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$,

$$F = (F_1, \dots, F_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

una funzione continua e $X_0 \in \Omega$ un punto fissato.

Se $X : [0, T] \to \Omega$ è una funzione continua su $[0, T]$ tale che

$$X(t) = X_0 + \int_0^t F\big(X(s)\big)\, ds \quad \text{per ogni} \quad t \in [0, T],$$

allora:

- $X(0) = X_0$;
- X è derivabile in $[0, T)$;
- $X'(t) = F\big(X(t)\big)$ per ogni $t \in [0, T)$;
- X è di classe C^1 in $[0, T)$.

Nel seguito, dimostreremo che dati Ω, F e X_0 come sopra, esistono

$$T > 0$$

ed una funzione continua

$$X : [0, T] \to \Omega$$

tali che

$$X(t) = X_0 + \int_0^t F\big(X(s)\big)\, ds \quad \text{per ogni} \quad t \in [0, T].$$

Teorema di Cauchy-Lipschitz

Teorema 6. *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ una funzione* **localmente Lipschitziana**, *ovvero tale che*

$$\textit{per ogni} \quad X_0 \in \Omega \quad \textit{esistono} \quad r > 0 \quad \textit{e} \quad L > 0 \quad \textit{tali che}$$

$$|F(X) - F(Y)| \le L|X - Y| \quad \textit{per ogni} \quad X, Y \in B_r(X_0) \cap \Omega.$$

Allora, per ogni X_0 esistono $T > 0$ è una soluzione $X : [0, T] \to \Omega$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = F(X(t)) \quad \textit{per ogni} \quad t \in [0, T], \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Dimostrazione: Dimostreremo che esiste una soluzione del problema nella sua formulazione integrale.
Step 1. *La succesione.* Siano $r > 0$ e $L > 0$ tali che $\overline{B}_r(X_0) \subset \Omega$ e

$$|F(X) - F(Y)| \le L|X - Y| \quad \text{per ogni} \quad X, Y \in \overline{B}_r(X_0).$$

Fissiamo un $T > 0$ che sceglieremo in seguito. Definiamo la seguente successione di funzioni continue (definite su $[0, T]$).

1. X_0 è la funzione costante:
$$X_0(t) = X_0 \quad \text{per ogni} \quad t \in [0, T].$$
2. $X_{n+1} : [0, T] \to \mathbb{R}$ è definita come
$$X_{n+1}(t) = X_0 + \int_0^t F(X_n(s))\, ds \quad \text{per ogni} \quad s \in [0, T].$$

Step 2. *La buona definizione.* Per essere certi che la successione di funzioni sia ben definita bisogna verificare che ad ogni passo abbiamo

$$X_n(s) \in \Omega \quad \text{per ogni} \quad s \in [0, T].$$

Questa è necessario perché, per definire X_{n+1}, bisognerà calcolre $F(X_n(s))$ in ogni $s \in [0, T]$. Per fare ciò, osserviamo che (per ogni $t \in [0, T]$)

$$\begin{aligned} |X_n(t) - X_0| &\le \int_0^t |F(X_{n-1}(s))|\, ds \\ &\le \int_0^t \big(|F(X_0)| + Lr\big)\, ds \le t\big(|F(X_0)| + Lr\big) \le T\big(|F(X_0)| + Lr\big). \end{aligned}$$

Scegliendo T (in funzione di L, r e $|F(X_0)|$) tale che

$$T\big(|F(X_0)| + Lr\big) \le r,$$

abbiamo la tesi.

Step 3. *La distanza fra X_{n+1} e X_n.* Per ogni $t \in [0, T]$ stimiamo

$$\begin{aligned} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| &\le \left| \int_0^t F(X_n(s))\, ds - \int_0^t F(X_{n-1}(s))|\, ds \right| \\ &\le \int_0^t \big|F(X_n(s)) - F(X_{n-1}(s))\big|\, ds \\ &\le \int_0^t L\big|X_n(s) - X_{n-1}(s)\big|\, ds \\ &\le \int_0^t L\|X_n - X_{n-1}\|_\infty\, ds \\ &\le tL\|X_n - X_{n-1}\|_\infty \\ &\le TL\|X_n - X_{n-1}\|_\infty \end{aligned}$$

Ora, siccome la disuguaglianza è vera per ogni $t \in [0, T]$, abbiamo

$$\|X_{n+1} - X_n\|_\infty \le TL\|X_n - X_{n-1}\|_\infty.$$

Ragionando per induzione, abbiamo che

$$\|X_{n+1} - X_n\|_\infty \le (TL)^n\|X_1 - X_0\|_\infty.$$

Scegliendo T tale che

$$LT < 1,$$

abbiamo che la serie $\sum_{n\ge1} \|X_{n+1} - X_n\|_\infty$ converge. Di conseguenza, la successione

$$X_n : [0, T] \to \mathbb{R}^d$$

converge uniformemente ad una certa funzione continua

$$X : [0, T] \to \mathbb{R}^d.$$

Step 4. *Conclusione: X è la soluzione.* Come conseguenza dalla convergenza uniforme, abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} X_n(t) = X(t) \quad \text{per ogni} \quad t \in [0, T],$$

e quindi

$$|X(t) - X_0| = \lim_{n\to\infty} |X_n(t) - X_0| \le r \quad \text{per ogni} \quad t \in [0, T].$$

In particolare,

$$X(t) \in \overline{B}_r(X_0) \subset \Omega \quad \text{per ogni} \quad t \in [0, T].$$

Ora, consideriamo l'identità

$$X_{n+1}(t) = X_0 + \int_0^t F(X_n(s))\, ds.$$

Passando al limite per $n \to \infty$, otteniamo che

$$\lim_{n\to\infty} X_{n+1}(t) = X(t).$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned}
\left|X_0 + \int_0^t F(X_n(s))\, ds - \Big(X_0 + \int_0^t F(X(s))\, ds\Big)\right| &= \left|\int_0^t F(X_n(s))\, ds - \int_0^t F(X(s))\, ds\right| \\
&\le \int_0^t \big|F(X_n(s)) - F(X(s))\big|\, ds \\
&\le \int_0^t L\big|X_n(s) - X(s)\big|\, ds \\
&\le \int_0^t L\|X_n - X\|_\infty\, ds \\
&\le tL\|X_n - X\|_\infty \\
&\le TL\|X_n - X\|_\infty.
\end{aligned}$$

Ora, siccome $\|X_n - X\|_\infty \to 0$, abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \left(X_0 + \int_0^t F(X_n(s))\, ds\right) = X_0 + \int_0^t F(X(s))\, ds.$$

Di conseguenza,

$$X(t) = X_0 + \int_0^t F(X(s))\, ds. \qquad \square$$

Teorema 7. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ una funzione di classe C^1 e $X_0 \in \Omega$ un dato iniziale. Se l'intervallo massimale di esistenza della soluzione di*

$$X'(t) = F(X(t)), \qquad X(0) = X_0$$

è finito: $T_{max} < +\infty$, allora succede una delle due cose seguenti:

(i) *esiste una successione (crescente) $t_n \to T_{max}$ tale che*

$$\lim_{n\to+\infty} |X(t_n)| = +\infty \ ;$$

(ii) *esiste una successione (crescente) $t_n \to T_{max}$ tale che*

$$\textit{la successione} \quad X(t_n) \quad \textit{converge ad un certo} \quad X_\infty \in \partial\Omega.$$

Dimostrazione: Sia t_n una successione crescente che converge a $T_{max} < +\infty$. Se (i) non vale, allora (a meno di estrarre una sottosuccessione) la successione $X(t_n)$ converge ad un certo $X_\infty \in \overline{\Omega}$. Ora, se $X_\infty \notin \partial\Omega$, allora $X_\infty \in \mathrm{int}(\Omega)$. Esiste quindi $\delta > 0$ tale che $B_{3\delta}(X_0) \subset \Omega$.

Supponiamo ora che L sia la costante di Lipschitz di F in $B_{2\delta}(X_\infty)$. Inoltre, siccome $X(t_n) \to X_\infty$, abbiamo che per n abbastanza grande

$$|F(X(t_n))| \le |F(X_\infty)| + 1 \qquad \text{e} \qquad X(t_n) \in B_\delta(X_\infty).$$

Ora, fissiamo $T_0 > 0$ tale che

$$T_0 \le \big(|F(X_\infty)| + 1 + \delta L\big)\delta \qquad \text{e} \qquad T_0 \le \frac{1}{L}.$$

In particolare, per ogni n, possiamo estendere la soluzione di

$$X' = F(X)$$

sull'intervallo $[0, t_n + T_0)$. Per n abbsastanza grande, abbiamo che $t_n + T_0 > T_{max}$ in contraddizione con la definizione di intervallo massimale di esistenza. $\square$